



## Examen

### Pregunta 1.

- a) (4 pts.) Considere la curva  $\Gamma$  parametrizada por:

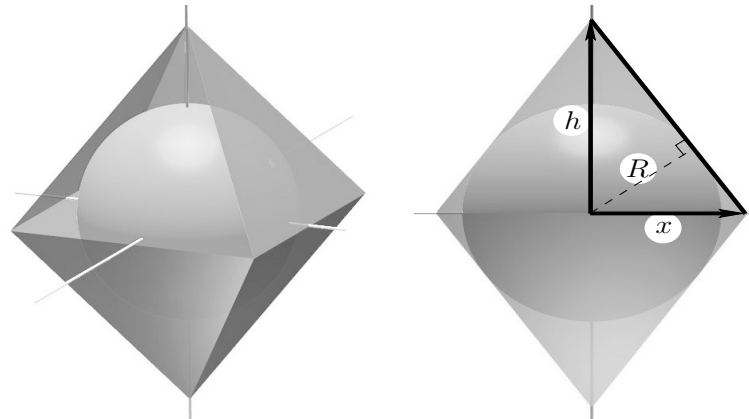
$$r(t) = \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(t), \frac{\sqrt{2}}{2} t, \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(t) \right) \quad t \in \mathbb{R}$$

Compruebe que la curva está parametrizada por longitud de arco, es decir  $s = t$ . Calcule los vectores tangente,  $T(s)$ , normal  $N(s)$  y binormal  $B(s)$ , la curvatura  $\kappa(s)$  y la torsión  $\tau(s)$ .

- b) (2 pts.) Calcule:  $\int_0^1 \frac{x \arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$

### Pregunta 2.

- a) (2 pts.) Si  $f(x) = \int_0^{x^3} t^2 e^t dt$  y  $g(x) = \int_1^{x^2} 2xe^{xt^2} dt$ . Calcule  $f'(1)$  y  $g'(1)$ .
- b) Se desea circunscribir una pirámide doble de base cuadrada, de lado  $2x$  y altura total  $2h$  a una esfera de radio  $R$ , como se muestra en la figura.



- i) (1.5 pts.) Demuestre que el volumen del octaedro, en términos de la variable  $h$ , está dado por la fórmula

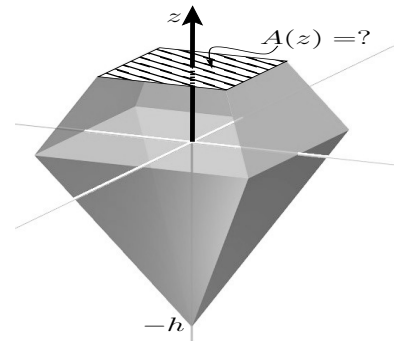
$$V(h) = \frac{8R^2 h^3}{3(h^2 - R^2)}$$

- ii) (2.5 pts.) Encuentre las dimensiones del octaedro ( $h$  y  $x$ ) que minimizan el volumen anterior. Justifique que se trata de un mínimo.

**Bonus:** (2 pts. adjudicables a una pregunta) Demuestre, usando integración con  $z \in [-h, h]$ , que el volumen del octaedro, en términos de  $x$  y  $h$  está dado por la fórmula

$$V(x, h) = \frac{8x^2 h}{3}$$

Ind: Puede serle útil el corte mostrado en la figura.



### Pregunta 3.

a) (2 pts.) Estudie la convergencia de las series:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right); \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + \cos\left(\frac{2}{n!}\right)}{n^2 + 4}$$

b) (2 pts.) Determine el radio e intervalo de convergencia de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n$$

c) (2 pts.) Demuestre que para todo  $x \in (-1, 1)$  se cumple que:  $\int_0^x \ln(1-t)^{\frac{1}{i}} dt = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}.$

(Indicación: Use la serie geométrica)

Tiempo: 3 horas.

# Examen Cálculo Diferencial e Integral (2015-02)

## Punto Problema 1

a)  $\vec{r}(t) = (\frac{\sqrt{2}}{2} \sin t, \frac{\sqrt{2}}{2} t, -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos t), t \in \mathbb{R}$

$$\vec{r}'(t) = (\frac{\sqrt{2}}{2} \cos t, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t) \Rightarrow \|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{\frac{1}{2} \cos^2 t + \frac{1}{2} \sin^2 t + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}(\cos^2 t + \sin^2 t) + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1$$

$$\Rightarrow \|\vec{r}'\| = 1. \text{ Sigue que } s(t) = \int_0^t \|\vec{r}'\| dt = \int_0^t 1 dt = t$$

Entonces en  $s=t$ ,  $\vec{r}(t) = \vec{\gamma}(s)$  y  $\Gamma$  esta arco parametrizada

0.5  $\Rightarrow$  Sigue que  $T(s) = \frac{d\vec{\gamma}(s)}{ds} = (\frac{\sqrt{2}}{2} \cos(s), \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(s))$

$$\frac{dT}{ds} = (-\frac{\sqrt{2}}{2} \sin(s), 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(s)) \Rightarrow K(s) = \left\| \frac{dT}{ds} \right\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

1.0  $\Rightarrow$   $N(s) = \frac{dT/ds}{\|dT/ds\|} = \frac{1}{1/\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{2} (-\sin(s), 0, \cos(s)) = (-\sin(s), 0, \cos(s))$

0.5  $\Rightarrow$   $B(s) = T \times N = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} i & j & k \\ \cos s & 1 & \sin s \\ -\sin s & 0 & \cos s \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos(s), -1, \sin(s))$

1.0  $\Rightarrow$   $\frac{dB}{ds} = \frac{\sqrt{2}}{2} (-\sin(s), 0, \cos(s))$

Finalmente  $\vec{\zeta}(s) = -N \cdot \frac{dB}{ds} = -(-\sin(s), 0, \cos(s)) \cdot (-\sin(s), 0, \cos(s)) \frac{\sqrt{2}}{2}$

1.0  $\Rightarrow$   $\Rightarrow \vec{\zeta}(s) = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

b) Calcular  $I = \int_0^1 \frac{x \arcsen x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

0.5 Una forma puede ser por partes

$$u = \arcsen x \rightarrow du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$dv = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \rightarrow v = -\sqrt{1-x^2}$$

1.5  $\Rightarrow$   $I = -\sqrt{1-x^2} \arcsen x \Big|_0^1 + \int_0^1 \sqrt{1-x^2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^1 1 dx = 1$

OTRA FORMA: Por substitucion  $x = \sin \alpha$ ,  $dx = \cos \alpha d\alpha$

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \alpha \arcsen(\sin \alpha)}{\sqrt{1-\sin^2 \alpha}} \cdot \cos \alpha d\alpha = \int_0^{\pi/2} \alpha \sin \alpha d\alpha = \dots = 1$$

## Pauta Problema 2

a)  $f(x) = \int_0^{x^3} t^2 e^t dt$  ;  $g(x) = \int_1^{x^2} 2 e^{xt^2} dt$ . Calcular  $f'(1)$ ,  $g'(1)$

0.5  $\rightarrow$   $f'(x) \stackrel{\text{T.F.C.}}{=} (x^3)^2 e^{x^3} \cdot (x^3)' = x^6 e^{x^3} \cdot 3x^2 \Rightarrow f'(1) = 1^6 e^{1^3} \cdot 3 \cdot 1^2 = 3e$

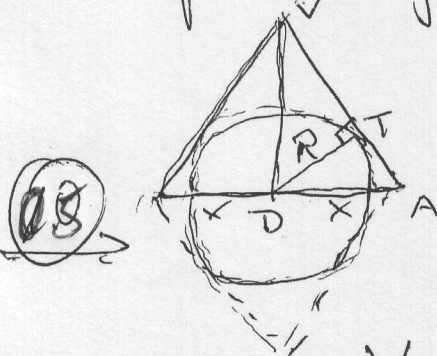
$g(x) = \int_1^{x^2} 2 e^{xt^2} dt$  sustitución  $u = xt^2 \Rightarrow du = 2xt dt$   
 $t = \sqrt{\frac{u}{x}}$

0.5  $\Rightarrow g(x) = \int_x^{x^5} \frac{2 e^u}{2xt} du = \frac{1}{x} \int_x^{x^5} \frac{e^u du}{\sqrt{\frac{u}{x}}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_x^{x^5} \frac{e^u}{\sqrt{u}} du$

Siempre  $g'(x) = -\frac{1}{2} x^{-3/2} \int_x^{x^5} \frac{e^u}{\sqrt{u}} du + \frac{1}{\sqrt{x}} \left[ \frac{e^{x^5}}{x^{5/2}} \cdot 5x^4 - \frac{e^x}{\sqrt{x}} \right]$

1.0  $\Rightarrow g'(1) = -\frac{1}{2} 1^{-3/2} \int_1^1 \frac{e^u}{\sqrt{u}} du + \frac{1}{\sqrt{1}} \left[ \frac{e^{1^5}}{1^{5/2}} \cdot 5 \cdot 1^4 - \frac{e^1}{\sqrt{1}} \right] = 5e - e = 4e$

b) i) Según el esquema del corte transversal de la pirámide y la esfera se tiene



$\overline{VD} = h$ ,  $\overline{DA} = x$ ,  $\overline{DT} = R$ ,  $\overline{VT} = \sqrt{h^2 - R^2}$

Los  $\Delta$ s  $VDT$  y  $VDA$  (semejantes) dan:

$\frac{h}{x} = \frac{\sqrt{h^2 - R^2}}{R} \Rightarrow \frac{h^2}{x^2} = \frac{h^2 - R^2}{R^2} \Rightarrow x^2 = \frac{h^2 R^2}{h^2 - R^2}$

El volumen de la pirámide doble es

$V = 2 \cdot \frac{1}{3} \text{ base} \cdot \text{Altura} = 2 \cdot \frac{1}{3} (2x)^2 \cdot h = \frac{8}{3} x^2 h = \frac{8}{3} \frac{h^3 R^2}{h^2 - R^2}$

1.0  $\Rightarrow V = \frac{8}{3} \frac{R^2 h^3}{h^2 - R^2}$

ii)  $V'(h) = \frac{8}{3} R^2 \frac{3h^2(h^2 - R^2) - h^3 \cdot 2h}{(h^2 - R^2)^2} = \frac{8}{3} R^2 \frac{h^2(h^2 - 3R^2)}{(h^2 - R^2)^2}$

1.0  $\rightarrow$  Sigue que  $V'(h) = 0$  si  $h = 0$  o  $h = R\sqrt{3}$ , (se descarta  $h = 0$ )

Si  $h < R\sqrt{3}$ ,  $V' < 0 \Rightarrow V$  decrece; si  $h > R\sqrt{3}$ ,  $V' > 0 \Rightarrow V$  crece.

Entonces  $h = R\sqrt{3}$  es pto de mínimo de  $V$ , además  $x = \frac{h^2 R^2}{h^2 - R^2} = \frac{3R^2 \cdot R^2}{3R^2 - R^2} = \frac{3R^4}{2R^2} = \frac{3R^2}{2}$

1.0  $\Rightarrow x^2 = \frac{3}{2} R^2 \Rightarrow x = R\sqrt{\frac{3}{2}}$



# Punto Problema 3

a) La serie numérica  $\sum_1^{\infty} n \ln(1 + \frac{1}{n}) = \sum_1^{\infty} \ln(1 + \frac{1}{n})^n$  pero

(1.0)  $a_n = \ln(1 + \frac{1}{n})^n \rightarrow \ln(e) = 1 \neq 0$ . Sigue que  $\sum_1^{\infty} n \ln(1 + \frac{1}{n})$  DIVERGE

La serie  $\sum_0^{\infty} \frac{1 + \cos(\frac{2}{n})}{n^2 + 4}$  se puede estudiar por comparación

(1.0)  $\frac{1 + \cos(\frac{2}{n})}{n^2 + 4} \leq \frac{2}{n^2 + 4}$  y  $\sum_0^{\infty} \frac{2}{n^2 + 4}$  converge  $\Rightarrow \sum_0^{\infty} \frac{1 + \cos(\frac{2}{n})}{n^2 + 4}$  conv

b)  $\sum_1^{\infty} (-1)^{n+1} \sin(\frac{1}{\sqrt{n}}) x^n$

Para el radio de convergencia  $\alpha = \lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim \frac{\sin \frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\sin \frac{1}{\sqrt{n}}}$

(0.5)  $= \lim \frac{\sin(\frac{1}{\sqrt{n+1}}) \frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\frac{1}{\sqrt{n+1}} \frac{1}{\sqrt{n+1}}} = \lim \frac{\sin \frac{1}{\sqrt{n+1}}}{1/\sqrt{n+1}} = \lim \frac{\sin \frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\frac{1}{\sqrt{n+1}}} = 1$   
 (También por L'Hopital)

Intervalo provisorio  $(-1, 1)$ . En  $x = -1 \rightarrow \sum_1^{\infty} (-1)^{n+1} \sin \frac{1}{\sqrt{n}} (-1)^n = - \sum_1^{\infty} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$  comparando en  $\sum_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ ;  $\lim \frac{\sin \frac{1}{\sqrt{n}}}{1/\sqrt{n}} = 1$  y como

(0.7)  $\sum_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$  diverge  $\Rightarrow \sum_1^{\infty} \sin(\frac{1}{\sqrt{n}})$  diverge.

En  $x = 1 \rightarrow \sum_1^{\infty} (-1)^{n+1} \sin(\frac{1}{\sqrt{n}})$  es tipo Leibnitz (alternante)

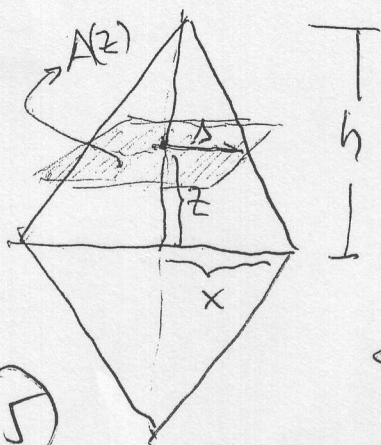
(0.8) En  $\sin \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$  decreciendo  $\Rightarrow \sum_1^{\infty} (-1)^{n+1} \sin(\frac{1}{\sqrt{n}})$  CONVERGE.  
 Sigue que  $I_c = (-1, 1]$

c) Una Forma: usando  $\sum_0^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \Rightarrow \sum_0^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-x)$

(0.5)  $\Rightarrow \sum_1^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$  Derivando  $\int_0^x \ln(1-t)' dt = \int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt = \int_0^x \sum_1^{\infty} \frac{t^{n-1}}{t} dt$   
 $= - \int_0^x \sum_1^{\infty} \frac{t^{n-1}}{n} dt = - \sum_1^{\infty} \int_0^x \frac{t^{n-1}}{n} dt = - \sum_1^{\infty} \frac{t^n}{n^2} \Big|_0^x = - \sum_1^{\infty} \frac{x^n}{n^2} \quad x \in [-1, 1]$

P2 (Bonus)

$$z \in [-h, h]$$



Para la sección  $A(z)$  se tiene

$A(z) = (2s)^2$  donde  $s$  se obtiene de

$$\frac{h}{x} = \frac{h-z}{s} \Rightarrow s = \frac{(h-z)x}{h}$$

Sigue que  $A(z) = 4s^2 = \frac{4x^2(h-z)^2}{h^2}$

0.5

Entonces el volumen de la pirámide doble será

$$\begin{aligned} V(x, h) &= 2 \int_0^h \frac{4x^2(h-z)^2}{h^2} dz = \frac{8x^2}{h^2} \int_0^h (h-z)^2 dz \\ &= \frac{8x^2}{h^2} \left[ -\frac{(h-z)^3}{3} \right]_0^h = \frac{8x^2}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} = \frac{8x^2 h}{3} \end{aligned}$$

1.5

Así  $V(x, h) = \frac{8x^2 h}{3}$